Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 4 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(2 Punkte)* Für rationale Zahlen $r, q, s, t \in \mathbb{Q}$ mit $rt - qs \neq 0$ und eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sei

$$y := \frac{rx + q}{sx + t}.$$

Zeige, dass y irrational ist, d.h. $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lösung. Wir überprüfen durch Fallunterscheidung, dass y wohldefiniert ist, d.h. $sx + t \neq 0$ für $s, t \in \mathbb{Q}$:

- Ist $s = 0$, so gilt wegen $0 \neq rt - qs = rt$, dass $t \neq 0$.
- Ist $s \neq 0$, so impliziert $sx + t = 0$, dass $x \in \mathbb{Q}$. Widerspruch zur Voraussetzung!

$\Longrightarrow sx + t \neq 0$.
Angenommen $y \in \mathbb{Q}$. Es folgt:

$$\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{m}{n} = \frac{rx + q}{sx + t}\,.$$

Umformen liefert

$$(ms - nr)\, x = nq - mt\,. \tag{1}$$

Wir argumentieren zuerst, dass $ms - nr \neq 0$ gelten muss. Angenommen es wäre $ms - nr = 0$. Falls $s = 0$, so gilt wegen $rt - qs \neq 0$, dass $r \neq 0$. Andererseits:

$$s = 0 \Longrightarrow nr = 0 \Longrightarrow r = 0 \Longrightarrow rt - qs = 0 \qquad \text{Widerspruch!}$$

Also $s \neq 0$.

$$\Longrightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Longrightarrow \exists p \in \mathbb{Q} : q = pr \wedge t = ps \Longrightarrow rt - qs = p(sr - rs) = 0 \qquad \text{Widerspruch!}$$

Es ist also tatsächlich $ms - nr \neq 0$. Auflösen von (1) nach x liefert

$$x = \frac{nq - mt}{ms - nr} \in \mathbb{Q} \qquad \text{Widerspruch!}$$

Da offensichtlich $y \in \mathbb{R}$, muss also gelten, dass $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ■

Aufgabe 2: *(2 Punkte)* Welche *Zweierpotenzen*, d.h. welche Zahlen der Form

$$x := 2^k \qquad \text{für } k \in \mathbb{N},$$

lassen sich als Quadrat einer rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ darstellen, so dass $x = q^2$?

Lösung. Die Behauptung besagt, dass es teilerfremde Zahlen $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ gibt ($p_2 \neq 0$), so dass

$$2^k = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = \frac{p_1^2}{p_2^2},$$

wo die linke Seite eine ganze Zahl ist. Wir schließen, dass

$$p_1^2 = 2^k \quad \wedge \quad p_2^2 = 1$$

und daher $q \in \mathbb{Z}$. Wir machen nun eine *Fallunterscheidung.*

- Ist k gerade, $k = 2l$ für $l \in \mathbb{N}$, so gilt

$$p_1^2 = 2^k = 2^{2\ell} \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \pm 2^\ell .$$

- Ist k ungerade, $k = 2l + 1$ für $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so gilt

$$p_1^2 = 2^k \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \pm 2^{\frac{2l+1}{2}} = \pm 2^l \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} .$$

  Also wäre p_1 irrational, was aber nicht möglich ist.

Wir schlussfolgern: 2^k kann als Quadrat einer rationalen Zahl geschrieben werden, falls k gerade ist, $k = 2\ell$ für $\ell \in \mathbb{N}$. Es ist dann entweder $q = 2^\ell$ oder $q = -2^\ell$. ■

Aufgabe 3: *(2+2+2 Punkte)* Beweise folgende Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) Es gilt die Gleichheit

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $n^3 + 11n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.

(c) Für $x \geq -1$ gilt die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösung.

(a) *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$.
Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gelte die Gleichung $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$.
Induktionsschluss $n \to n+1$: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) &= 2(n+1) - 1 + \sum_{j=1}^{n}(2j-1) \\ &\overset{IV}{=} 2(n+1) - 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 .\end{aligned}$$

Die gewünschte Gleichheit gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist $n^3 + 11n = 12 = 6 \cdot 2$ durch 6 teilbar.
Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Die Zahl $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar, es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $n^3 + 11n = 6m$.
Induktionsschluss $n \to n+1$: Wir berechnen

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 11(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 \\ &= (n^3 + 11n) + 3(n^2 + n) + 12 \overset{IV}{=} 6m + 3(n^2 + n) + 12\end{aligned}$$

Betrachte nun den Term $n^2 + n$. Ist n gerade, so ist $n^2 + n$ gerade. Ist hingegen n ungerade, so ist n^2 ebenfalls ungerade. Somit ist $n^2 + n$ gerade. Es gibt also ein $\ell \in \mathbb{N}$ sodass $n^2 + n = 2\ell$ und somit

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = 6m + 3 \cdot 2\ell + 12 = 6(m + 2 + \ell) .$$

(c) Wir beweisen die Aussage durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $(1+x)^1 = 1 + 1x$ wahr.
Induktionsvoraussetzung: Die Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ gelte für $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss $n \to n+1$: da nach Voraussetzung $x + 1 \geq 0$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) &\overset{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x ,\end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt verwenden, dass $nx^2 \geq 0$.

■